

نام و نام خانوادگی:

باسمه تعالی

تعداد صفحات: ۲

مدیریت آموزش و پرورش منطقه ۸- گروه های آموزشی متوسطه

دبیرستان:

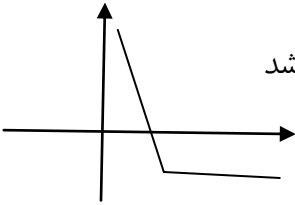
آزمون میان ترم درس: حسابان سوم ریاضی

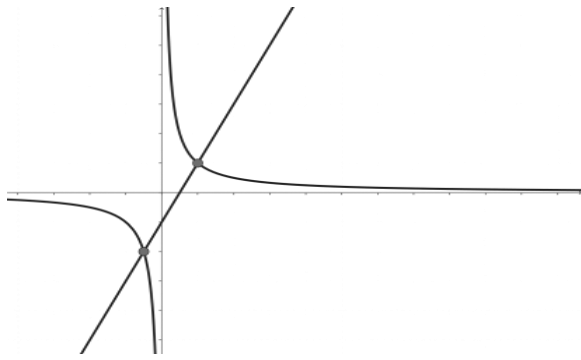
تاریخ امتحان: ۹۵/۱/۲۱

کلاس:

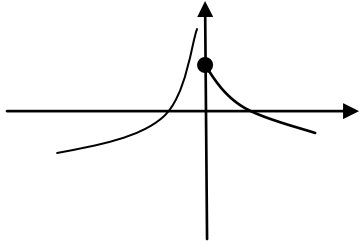
سال تحصیلی ۹۵-۹۴

مدت امتحان: ۱۵۰ دقیقه

| بارم | متن سؤال | ردیف |
|------|---|------|
| ۰/۷۵ | <p>در تصاعد عددی: $\frac{4}{5}, 1, \frac{6}{5}, \dots$ مجموع چند جمله برابر ۱۷ می باشد؟</p> $S_n = \frac{n}{2} [2a + (n-1)d] \Rightarrow 17 = \frac{n}{2} \left[\frac{4}{5} + (n-1)\frac{1}{5} \right] \Rightarrow n^2 + 7n - 170 = 0 \Rightarrow n = 10$ | ۱ |
| ۰/۷۵ | <p>در یک تصاعد هندسی جمله اول نصف حد مجموع جملات بعدی می باشد قدرنسبت را بیابید.</p> $a = \frac{1}{2} \times \frac{aq}{1-q} \Rightarrow 2 - 2q = q \Rightarrow q = \frac{2}{3}$ | ۲ |
| ۱ | <p>جاهای خالی را پر کنید.</p> <p>الف) تابع $f(x) = x-1 - x$ در بازه نزولی اکید می باشد.</p> <p>الف) در بازه $(-\infty, 1)$ نزولی اکید می باشد</p> $f(x) = \begin{cases} -1 & x \geq 1 \\ -2x + 1 & x < 1 \end{cases}$  <p>ب) اگر α ریشه معادله $3x^2 - 8x + 3 = 0$ باشد حاصل $\alpha + \frac{1}{\alpha}$ برابر می باشد.</p> $p = \alpha\beta = 1 \Rightarrow \beta = \frac{1}{\alpha} \Rightarrow \alpha + \frac{1}{\alpha} = \alpha + \beta = \frac{8}{3}$ <p>ج) باقیمانده تقسیم $3x^3 - 3x^2 + 5$ بر $x+1$ برابر می باشد.</p> $x+1=0 \Rightarrow x=-1 \Rightarrow p(-1) = -3 - 3 + 5 = -1$ <p>د) ماکسیمم تابع $f(x) = -3x^2 - 6x + 4$ برابر می باشد</p> $x = -\frac{b}{2a} = \frac{6}{-6} = -1 \Rightarrow f(-1) = 7$ | ۳ |

| | | |
|------|--|---|
| ۰/۷۵ | <p>۴ به ۲۰۰ کیلو گرم محلول آب نمک ۵ درصد ۶ کیلو گرم نمک اضافه می کنیم اگر بخواهیم محلول آب نمک ۸ درصد داشته باشیم چند کیلو گرم آب را باید تبخیر نمائیم</p> <p>وزن آب تبخیر شده $\frac{۸}{۱۰۰} = \frac{۱۰+۶}{۲۰۰+۶-y} \Rightarrow y = ۶$ وزن نمک موجود $\frac{۵}{۱۰۰} = \frac{x}{۲۰۰} \Rightarrow x = ۱۰$</p> | ۴ |
| ۱/۲۵ | <p>۵ نامعادله $\frac{x+1}{x} < ۲x$ را به روش جبری و هندسی حل کنید</p> <p>$\frac{۲x^2 - x - 1}{x} > ۰ \Rightarrow -\frac{1}{۲} < x < ۰ \vee x > ۱$</p>  <p>$۱ + \frac{1}{x} < ۲x \rightarrow \frac{1}{x} < ۲x - ۱$</p> | ۵ |
| ۱ | <p>۶ اگر یکی از ریشه های معادله $ax^2 + bx + c = ۰$ معکوس مجذور ریشه دیگر باشد ثابت کنید</p> <p>$a^3 + abc + c^3 = ۰$</p> <p>$\alpha = \frac{1}{\beta^2} \Rightarrow \alpha\beta^2 = ۱ \Rightarrow (\alpha\beta)\beta = ۱ \Rightarrow \frac{c}{a}\beta = ۱ \Rightarrow \beta = \frac{a}{c} \Rightarrow a \times \frac{a^2}{c^2} + b \times \frac{a}{c} + c = ۰ \Rightarrow a^3 + abc + c^3 = ۰$</p> | ۶ |
| ۰/۷۵ | <p>۷ زوج یا فرد بودن تابع $f(x) = \frac{\sqrt[3]{\sin x}}{[x] + [-x]}$ را بررسی نمائید.</p> <p>$x \in Z \Rightarrow [x] + [-x] = ۰, x \notin Z \Rightarrow [x] + [-x] = -۱$</p> <p>$[x] + [-x] \neq ۰ \Rightarrow D_f = \{x x \notin Z\} \Rightarrow f(x) = -\sqrt[3]{\sin x}$</p> <p>$f(-x) = -\sqrt[3]{\sin(-x)} = -\sqrt[3]{-\sin x} = \sqrt[3]{\sin x} = -f(x)$ تابع فرد است</p> | ۷ |
| ۱ | <p>۸ اگر دامنه تابع $f(x)$ بازه $[-۴, ۲]$ و برد آن بازه $[-۱, ۲]$ باشد دامنه و برد تابع $g(x) = ۲f(-۲x) - ۱$ بیابید.</p> <p>$R_g = [-۳, ۳], D_g = [-۱, ۲]$</p> | ۸ |

| | | |
|------|--|----|
| ۱/۲۵ | <p>اگر $f(x) = \frac{1}{x-2}$ و $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$ دامنه تابع $(g \circ f)(x)$ بیابید.</p> <p>مقدار عددی $\left(\frac{2f+g}{f}\right)(1)$ را محاسبه کنید.</p> <p>$D_f : x - 2 \neq 0 \Rightarrow x \neq 2$ $D_g : x - 1 > 0 \Rightarrow x > 1$</p> <p>$D_{g \circ f} = \left\{x \in D_f, f \in D_g\right\} = \left\{x \neq 2, \frac{1}{x-2} > 1\right\} = \left\{x \neq 2, \frac{3-x}{x-2} > 0\right\} = (2, 3)$</p> <p>$\left(\frac{2f+g}{f}\right)(1) = \frac{2f(1)+g(1)}{f(1)} = \frac{14}{3}$</p> | ۹ |
| ۱/۲۵ | <p>نشان دهید تابع $f(x) = \frac{2}{3}\sqrt{9-x^2}$ در بازه $[0, 3]$ یک به یک است و وارون تابع را محاسبه کنید</p> <p>$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \frac{2}{3}\sqrt{9-x_1^2} = \frac{2}{3}\sqrt{9-x_2^2} \Rightarrow 9-x_1^2 = 9-x_2^2 \Rightarrow x_1^2 = x_2^2 \xrightarrow{x>0} x_1 = x_2$</p> <p>$y = \frac{2}{3}\sqrt{9-x^2} \Rightarrow 9y^2 = 36-4x^2 \Rightarrow x^2 = \frac{36-9y^2}{4} \xrightarrow{x>0} x = \frac{3}{2}\sqrt{4-y^2} \Rightarrow f^{-1} = \frac{3}{2}\sqrt{4-y^2}$</p> | ۱۰ |
| ۰/۷۵ | <p>آیا توابع $f(x) = \sqrt{x^2(x-3)}$ و $g(x) = x \sqrt{x-3}$ برابرند؟ چرا</p> <p>$D_f : x^2(x-3) \geq 0 \Rightarrow D_f = \{x \geq 3\} \cup \{0\}, D_g : (x-3) \geq 0 \Rightarrow D_g = \{x \geq 3\} \Rightarrow D_f \neq D_g$</p> <p>دو تابع مساوی نیستند</p> | ۱۱ |
| ۱ | <p>معادله $\sin 4x = \cos 2x$ را حل کنید.</p> <p>$\sin 4x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) \Rightarrow 4x = 2k\pi + \left(\frac{\pi}{2} - 2x\right), 4x = 2k\pi + \pi - \left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) \Rightarrow$</p> <p>$x = \frac{k\pi}{3} + \frac{\pi}{12}, x = k\pi + \frac{\pi}{4}$</p> | ۱۲ |
| ۰/۷۵ | <p>مقدار عددی $\cos^{-1}\left(\sin\frac{9\pi}{5}\right)$ را محاسبه کنید</p> <p>$\cos^{-1}\left(\sin\left(\frac{9\pi}{5}\right)\right) = \cos^{-1}\left(\sin\left(2\pi - \frac{\pi}{5}\right)\right) = \cos^{-1}\left(\sin\left(-\frac{\pi}{5}\right)\right) = \cos^{-1}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{5}\right)\right)\right) = \frac{7\pi}{10}$</p> | ۱۳ |

| | | |
|------|---|----|
| ۱ | <p>مقدار عددی $\sin\left(2 \tan^{-1}\left(-\frac{3}{4}\right)\right)$ را محاسبه کنید</p> $\tan^{-1}\left(-\frac{3}{4}\right) = \alpha \Rightarrow \tan \alpha = -\frac{3}{4} \Rightarrow \sin 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} = \frac{-\frac{3}{2}}{1 + \frac{9}{16}} = -\frac{24}{25}$ | ۱۴ |
| ۱/۲۵ | <p>درستی تساوی زیر ثابت کنید</p> $\frac{4 \sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)}{\sin 5x + \sin x} = \frac{1}{\sin 3x}$ $\frac{4 \sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)}{\sin 5x + \sin x} = \frac{4(\sin^2 \frac{\pi}{4} - \sin^2 x)}{2 \sin 3x \cos 2x} = \frac{1 - 2 \sin^2 x}{\sin 3x \cos 2x} = \frac{\cos 2x}{\sin 3x \cos 2x} = \frac{1}{\sin 3x}$ | ۱۵ |
| ۰/۵ | <p>نمودار تابعی را رسم کنید که در همسایگی نقطه $x = 0$ تعریف شده و در این نقطه حد راست داشته باشد ولی فاقد حد چپ باشد.</p>  | ۱۶ |
| ۲/۵ | <p>حدهای زیر را محاسبه کنید</p> <p>الف) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2 + 2x - 1}{x^3 + x + 2}$ ب) $\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{1-x} - \frac{x-1}{ x-1 }$ ج) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}$</p> <p>الف) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2 + 2x - 1}{x^3 + x + 2} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(3x-1)}{(x+1)(x^2 - x + 2)} = -1$</p> <p>ب) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\sqrt{1-x} - \frac{x-1}{ x-1 } \right) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\sqrt{1-x} - \frac{x-1}{x-1} \right) = 0 - (-1) = 1$</p> <p>ج) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x (1 - \cos x)}{x^3 \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \times 2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^3 \times 1} = \frac{1}{2}$</p> | ۱۷ |

| | |
|-----|---|
| ۱/۵ | <p style="text-align: right;">۱۸</p> <p style="text-align: center;"> $f(x) = \begin{cases} \frac{2a(\sqrt{x+3}-2)}{ x-1 } & x < 1 \\ [x-1]+1 & x \geq 1 \end{cases}$ </p> <p style="text-align: right;">\$a\$ را چنان تعیین کنید که تابع پیوسته باشد.</p> $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2a(\sqrt{x+3}-2)}{ x-1 } = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2a(x+3-4)}{-(x-1)(\sqrt{x+3}+2)} = -\frac{a}{2}$ $\lim_{x \rightarrow 1^+} ([x-1]+1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} [x] = 1$ $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(x) \Rightarrow -\frac{a}{2} = 1 \Rightarrow a = -2$ |
| ۱ | <p style="text-align: right;">۱۹</p> <p style="text-align: center;"> حد تابع $f(x) = (x-1)^2 \cos \frac{1}{x-2}$ را وقتی $x \rightarrow 0$ محاسبه کنید. </p> <p style="text-align: center;"> میدانیم $-1 < \cos \frac{1}{x-2} < 1$ پس $-(x-1)^2 < (x-1)^2 \cos \frac{1}{x-2} < (x-1)^2$ از طرفی </p> <p style="text-align: center;"> طبق قضیه فشردگی $\lim_{x \rightarrow 0} -(x-1)^2 = \lim_{x \rightarrow 0} (x-1)^2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} (x-1)^2 \cos \frac{1}{x-2} = 0$ </p> |

سلامت و موفق باشید